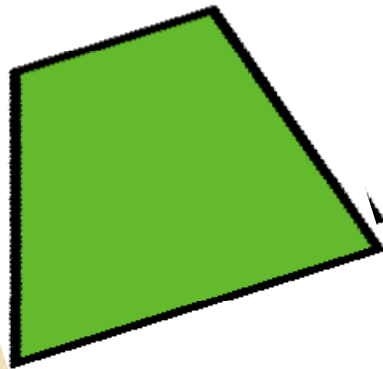




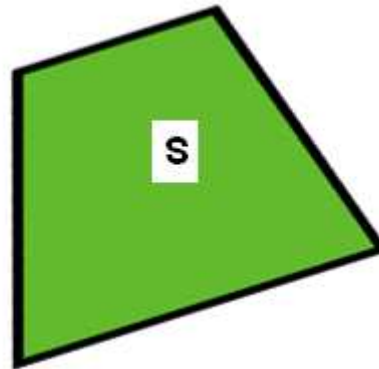
Многоугольники на клетчатой бумаге

Подготовили: учащиеся 8 класса
НОУ СОШ «Талань»
Аширов Арсений,
Куксенко Дмитрий

Геометрия - важный раздел математики. Ее возникновение уходит в глубь тысячелетий и связано, прежде всего, с развитием ремесел, культуры, искусств, с трудовой деятельностью человека и наблюдением за окружающим миром. Об этом свидетельствуют названия геометрических фигур.



Площадь - это величина, характеризующая размер той части плоскости, которая заключена внутри плоской замкнутой фигуры. Обозначается буквой S .

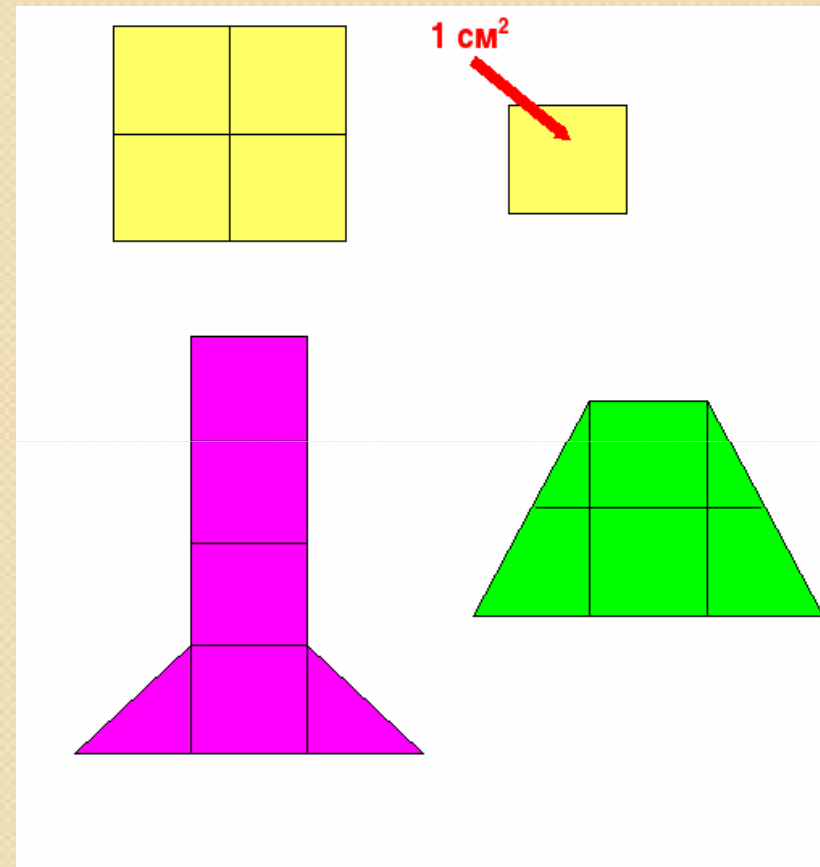




Измерить площадь - найти число, которое выражало бы эту величину. Другими словами необходимо установить некоторое соотношение между площадями фигур и числами, их выражающими.

Чтобы измерить площадь фигуры, надо, прежде всего, выбрать единицу измерения площади.

Такой единицей является квадрат, сторона которого равна некоторой единице измерения.





В наше время за единицу измерения площадей стали принимать квадратный метр.

Квадратная миля (США) = 2,58999 кв.км.

Квадратный ярд = 0,836127 кв.м.

Квадратный фут = 926,030 кв.см.

Давно забытые единицы измерения русской системы мер.

1 кв. верста = 250000 кв. сажень 1,138 кв.км.

1 кв. сажень = 9 кв. аршинов 4,093 кв.м.

1 десятина = 2400 кв. сажень 1,093 га.

1 кв. аршин = 256 кв. вершков 0,506 кв.м.

1 кв. вершок 19,758 кв.см.

1 кв. линия 6,451 кв.мм.



При изучении темы «Площади» мы решали много разнообразных и разноплановых задач на вычисление площадей фигур. Группа задач была посвящена площади фигур на клетчатой бумаге. Она нам показалась интересной. Возник вопрос: «Какие способы нахождения площади фигур существуют на клетчатой бумаге?»



Объект исследования: многоугольники на клетчатой бумаге

Предмет исследования: многообразие приёмов и способов вычисления площади многоугольника на клетчатой бумаге.

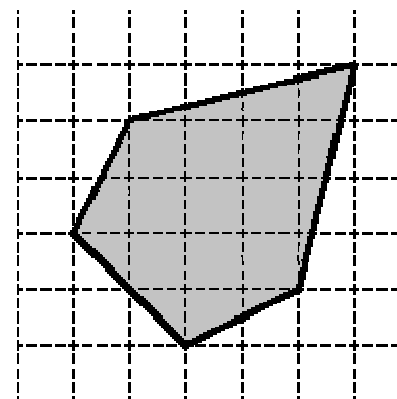
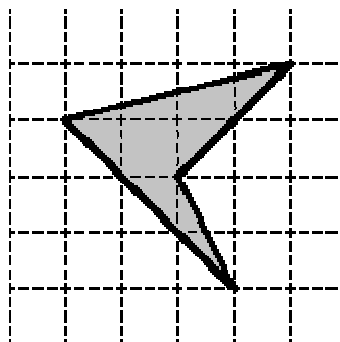
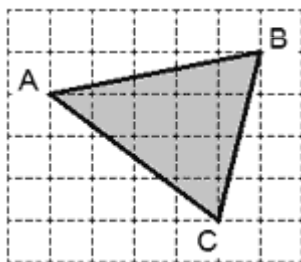
Методы исследования: сравнение, обобщение, аналогии, изучение литературных и Интернет-ресурсов, анализ и классификация информации.

Основная **цель исследования** заключается в расширении знаний о многообразии приёмов и способов вычисления площади многоугольника на клетчатой бумаге.

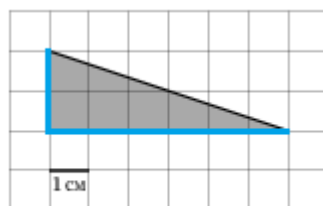
Для достижения поставленной цели предусматриваем решение следующих **задач**:

- Подобрать необходимую литературу
- Отобрать материал для исследования, выбрать главную, интересную, понятную информацию
- Проанализировать и систематизировать полученную информацию
- Найти различные методы и приёмы вычисления площади многоугольников на клетчатой бумаге
- Классифицировать исследуемые приемы
- Оформить работу в виде буклета

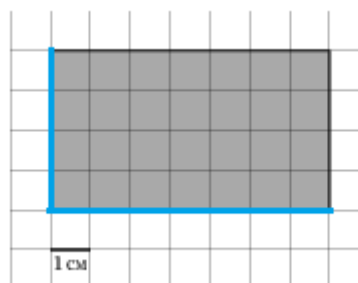
Многоугольник — фигура на плоскости, ограниченная замкнутой ломаной.



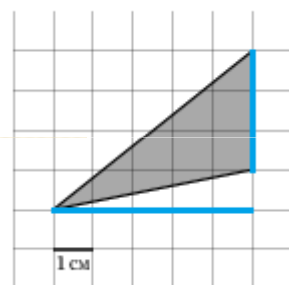
1. Вычисление по формулам



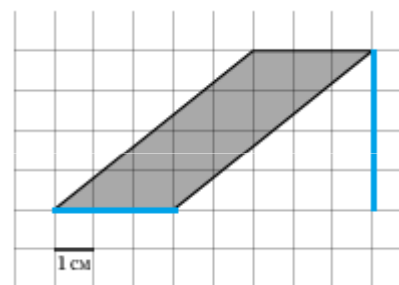
$$S = \frac{1}{2}ab$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$$



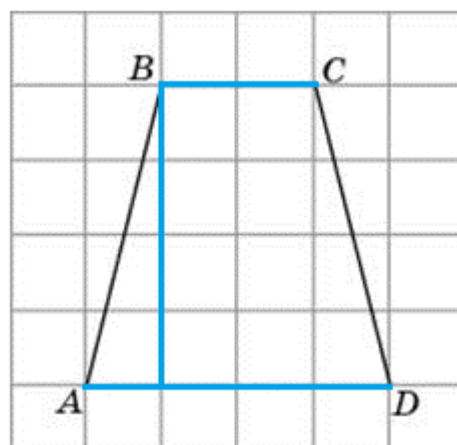
$$S = ab$$
$$S = 7 \cdot 4 = 28$$



$$S = \frac{1}{2}ah$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7,5$$



$$S = ah$$
$$S = 3 \cdot 4 = 12$$

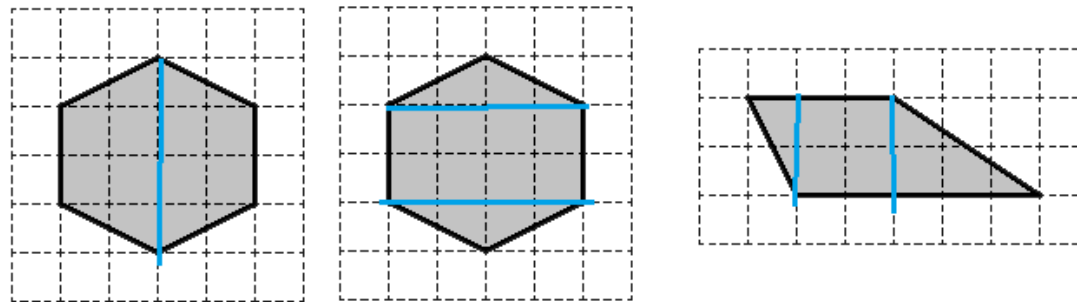


$$S = \frac{1}{2}(a + b)h$$
$$S = \frac{1}{2}(2 + 4) \cdot 4 = 12$$

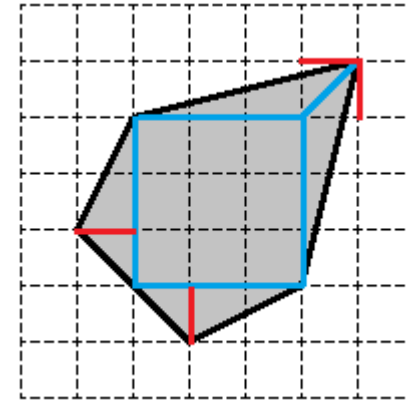
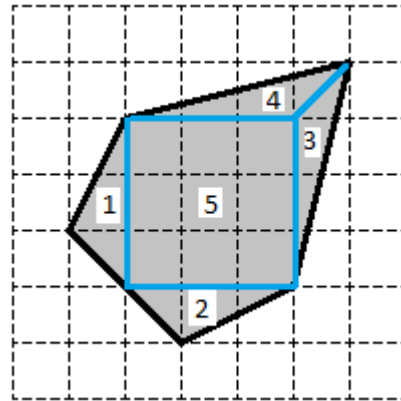
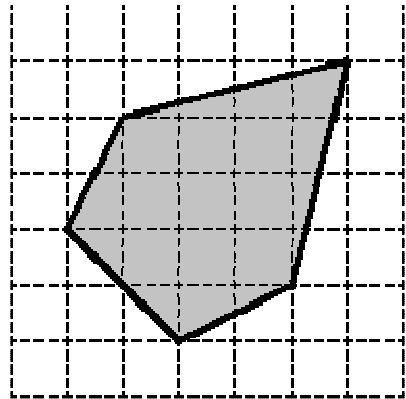
2. Разделение на простые фигуры

Для решения всех задач этого типа достаточно выполнить три простых шага:

- Разбить внутреннее пространство многоугольника на квадраты, прямоугольники и треугольники. Лучше, если все линии разбиения будут параллельны осям координат;
- Найти площадь каждого элемента разбиения.
- Сложив эти площади, получим площадь всего разбиения.



ПРИМЕР:



$$S_1 = 1/2 \cdot 3 \cdot 1 = 1,5$$

$$S_2 = 1/2 \cdot 3 \cdot 1 = 1,5$$

$$S_3 = 1/2 \cdot 3 \cdot 1 = 1,5$$

$$S_4 = 1/2 \cdot 3 \cdot 1 = 1,5$$

$$S_5 = 3 \cdot 3 = 9$$

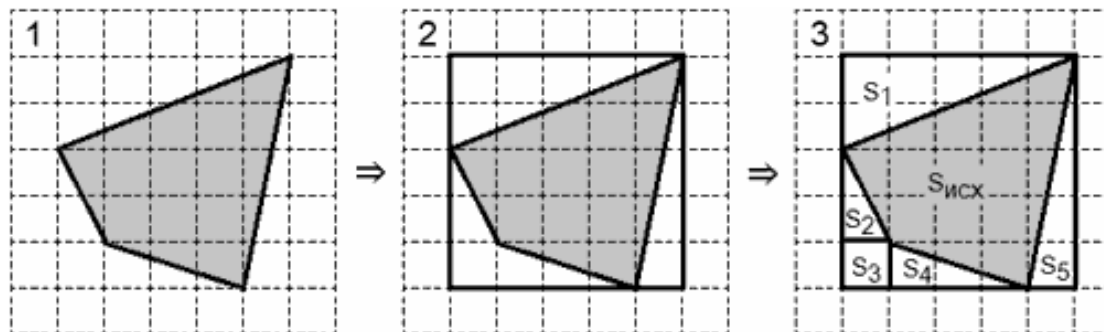
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 9 = 15$$

3. Выделение прямоугольника

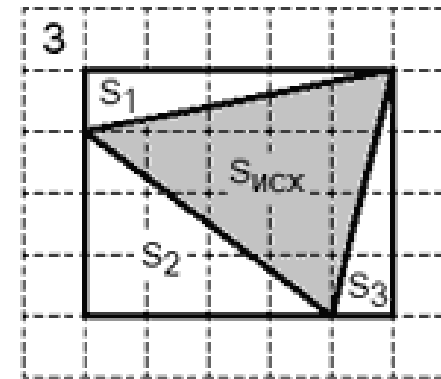
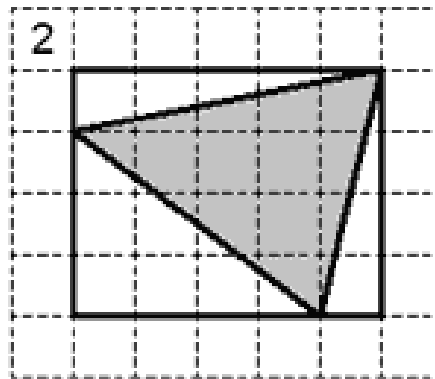
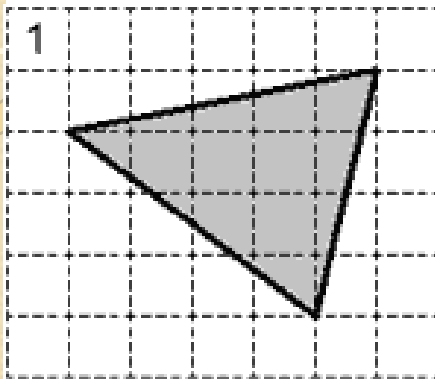
Для решения всех задач этого типа достаточно выполнить четыре простых шага:

1. Описать вокруг многоугольника прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат (линиям сетки). При этом желательно, чтобы на каждой стороне прямоугольника присутствовала хотя бы одна вершина исходной фигуры;
2. Разбить внутреннее пространство прямоугольника, не занятое исходной фигурой, на квадраты и треугольники. Лучше, если все линии разбиения будут параллельны осям координат;
3. Найти площадь каждого элемента разбиения. Сложив эти площади, получим площадь всего разбиения;
4. Наконец, из площади прямоугольника вычесть площадь разбиения — это и будет площадью исходной фигуры.

$S_{\text{исх}} = S - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5)$, где S — площадь описанного прямоугольника.



ПРИМЕР:



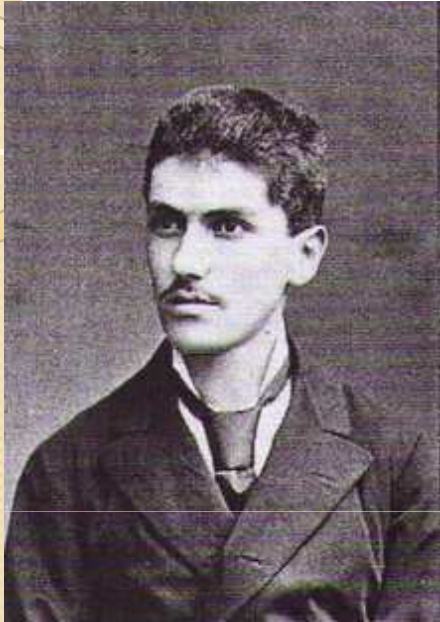
$S_{\text{исх}} = S - (S_1 + S_2 + S_3)$, где S — площадь описанного прямоугольника.

Найдем площадь элементов разбиения:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 = 2,5; S_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6; S_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2; S = 5 \cdot 4 = 20.$$

Наконец, найдем площадь треугольника: $S_{\text{исх}} = 20 - (2,5 + 6 + 2) = 9,5$.

Биография Пика



Георг Алекса́ндр Пик (10 августа 1859 — 13 июля 1942) — австрийский математик, родился в еврейской семье.

Георга, который был одарённым ребёнком, обучал отец, возглавлявший частный институт. В 16 лет Георг окончил школу и поступил в Венский университет. В 20 лет получил право преподавать физику и математику.

В Немецком университете в Праге в 1888 году Пик получил место экстраординарного профессора математики, затем в 1892-м стал ординарным профессором. В 1900—1901 годах занимал пост декана философского факультета.

В 1910 году Георг Пик был в комитете, созданном Немецким университетом Праги для рассмотрения вопроса о принятии Альберта Эйнштейна профессором в университет. Пик и физик Антон Лампа[de] были главными инициаторами этого назначения, и благодаря их усилиям Эйнштейн, с которым Пик впоследствии сдружился, в 1911 году возглавил кафедру теоретической физики в Немецком университете в Праге.

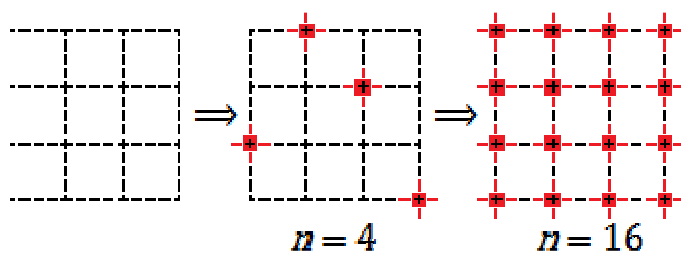
4. Формула Пика

Рассмотрим многоугольник на координатной сетке, вершины которого лежат в узлах этой сетки. Тогда площадь многоугольника равна:

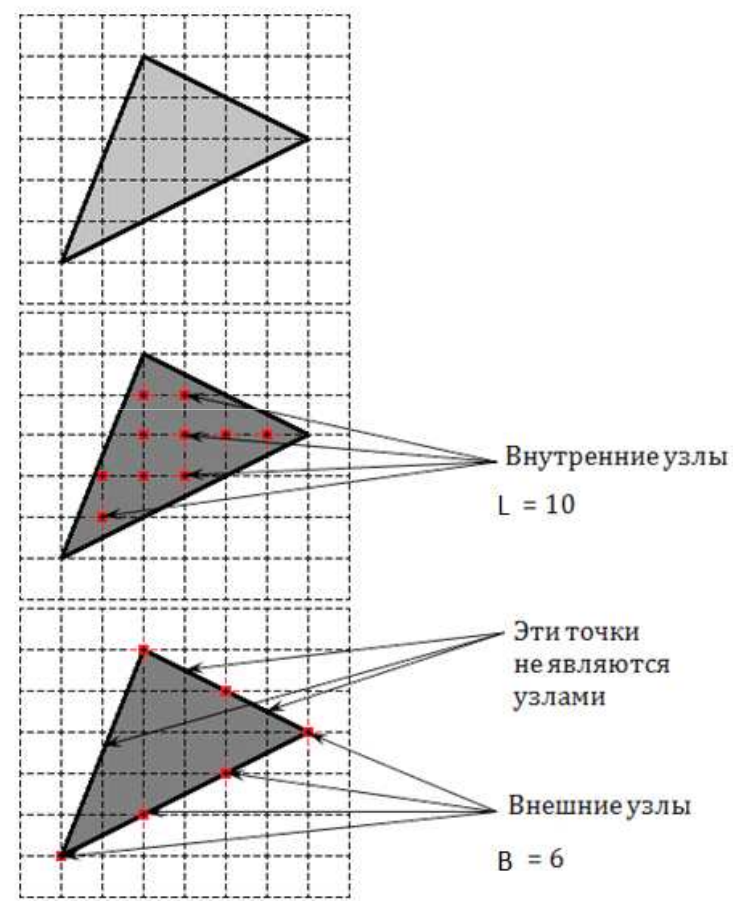
$$S = L + B/2 - 1,$$

где L — число узлов внутри данного многоугольника,

B — число узлов, которые лежат на его границе (граничных узлов).

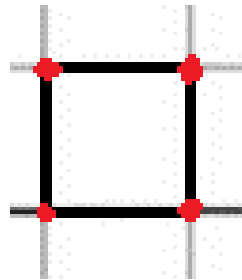


Узел координатной сетки — это любая точка, лежащая на пересечении вертикальных и горизонтальных линий этой сетки.

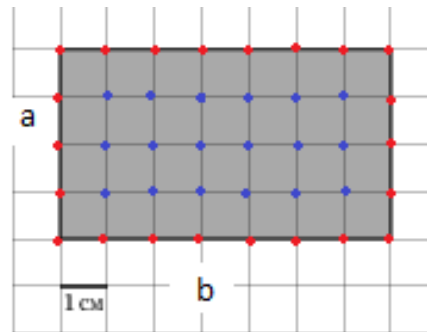


Доказательство теоремы Пика.

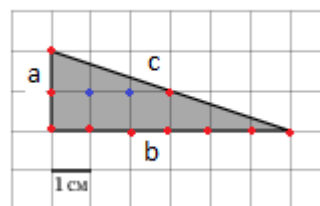
Сначала заметим, что формула Пика верна для единичного квадрата. Действительно, в этом случае мы имеем $L=0$, $B=4$ и $S=0+4/2-1=1$.



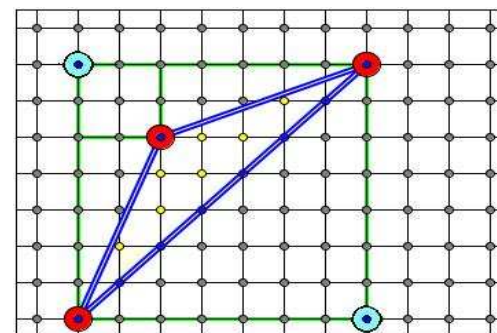
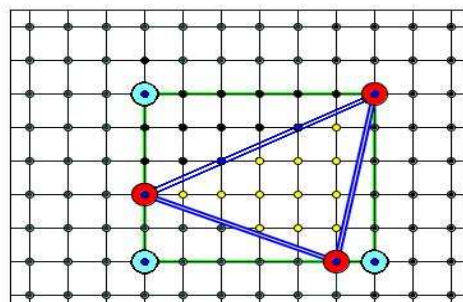
Рассмотрим прямоугольник со сторонами, лежащими на линиях решетки. Пусть длины его сторон равны a и b . Имеем в этом случае $L=(a-1)(b-1)$, $B=2(a+b)$ и, по формуле Пика, $S=(a-1)(b-1)+2(a+b)/2-1=ab-a-b+1+a+b-1=ab$.



Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник с катетами, лежащими на осях координат. Такой треугольник получается из прямоугольника со сторонами a и b , рассмотренного в предыдущем случае, разрезанием его по диагонали. Пусть на диагонали лежат c целочисленных точек. Тогда для этого случая $L = \frac{(a-1)(b-1)-c+2}{2}$, $B = \frac{2a+2b}{2} + c - 1$ и получаем, что $S = \frac{1}{2}ab$.

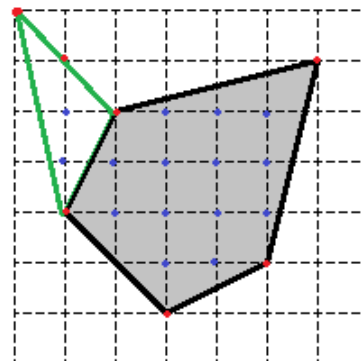


Теперь рассмотрим произвольный треугольник. Его можно получить, отрезав от прямоугольника несколько прямоугольных треугольников и, возможно, прямоугольник (см. рисунки). Поскольку и для прямоугольника, и для прямоугольного треугольника формула Пика верна, мы получаем, что она будет справедлива и для произвольного треугольника.



- Остается сделать последний шаг: перейти от треугольников к многоугольникам. Любой многоугольник можно разбить на треугольники (например, диагоналями). Поэтому нужно просто доказать, что при добавлении любого треугольника к произвольному многоугольнику формула Пика остается верной.

Пусть многоугольник M и треугольник T имеют общую сторону. Предположим, что для M формула Пика справедлива, докажем, что она будет верна и для многоугольника, полученного из M добавлением T . Так как M и T имеют общую сторону, то все целочисленные точки, лежащие на этой стороне, кроме двух вершин, становятся внутренними точками нового многоугольника. Вершины же будут граничными точками. Обозначим число общих точек через c и получим $L_{MT} = L_M + L_T + (c - 2)$ — число внутренних целочисленных точек нового многоугольника, $B_{MT} = B_M + B_T - 2(c - 2) - 2$ — число граничных точек нового многоугольника.



Из этих равенств получаем

$$L_M + L_T = L_{MT} - (c - 2), \quad B_M + B_T = B_{MT} + 2(c - 2) + 2.$$

Так как мы предположили, что теорема верна для M и для T по отдельности, то

$$S_{MT} = S_M + S_T = \left(L_M + \frac{B_M}{2} - 1\right) + \left(L_T + \frac{B_T}{2} - 1\right) =$$

$$= (L_M + L_T) + (B_M + B_T)/2 - 2 =$$

$$= L_{MT} - (c - 2) + (B_{MT} + 2(c - 2) + 2)/2 - 2 = L_{MT} + B_{MT}/2 - 1.$$

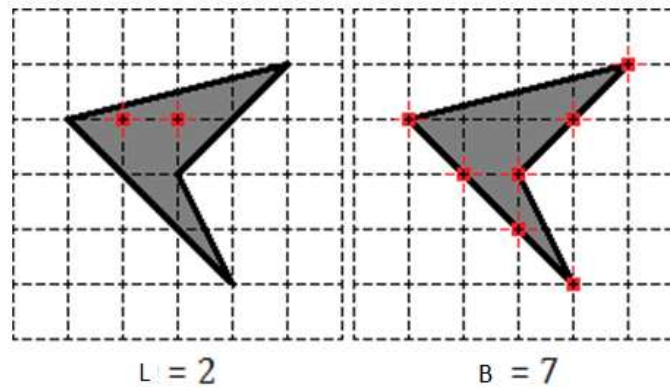
Тем самым, формула Пика доказана.



Чтобы решить задачи данного типа применяя формулу Пика необходимо выполнить следующие шаги:

- Отметить внутренние и граничные узлы
- Подсчитать количество внутренних узлов
- Подсчитать количество граничных узлов
- Подставить данные в формулу Пика $S = L + (B/2) - 1$ и выполнить вычисление.

ПРИМЕР:



Отмечаем внутренние и граничные узлы.

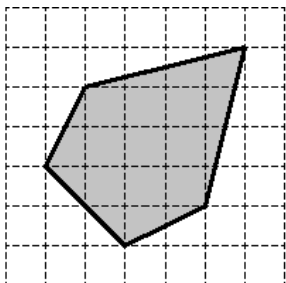
Внутренних узлов всего $L = 2$.

Граничных узлов: $B = 7$, из которых 4 являются вершинами четырехугольника, а еще 3 лежат на сторонах.

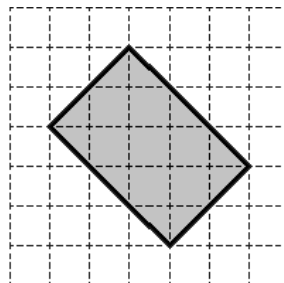
$$S = L + \frac{B}{2} - 1 = 2 + \frac{7}{2} - 1 = 4,5$$

Вычислите площадь данных фигур

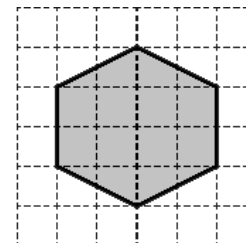
1



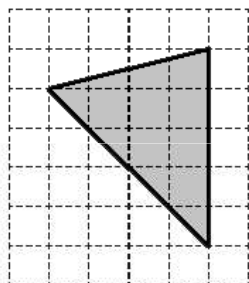
2



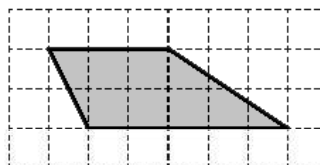
3



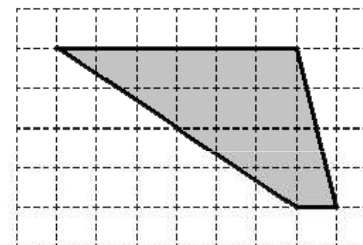
4



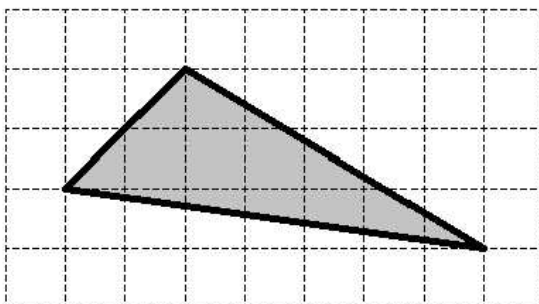
5



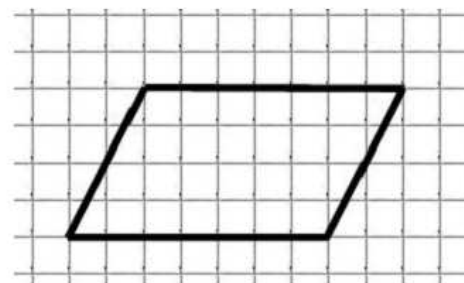
6



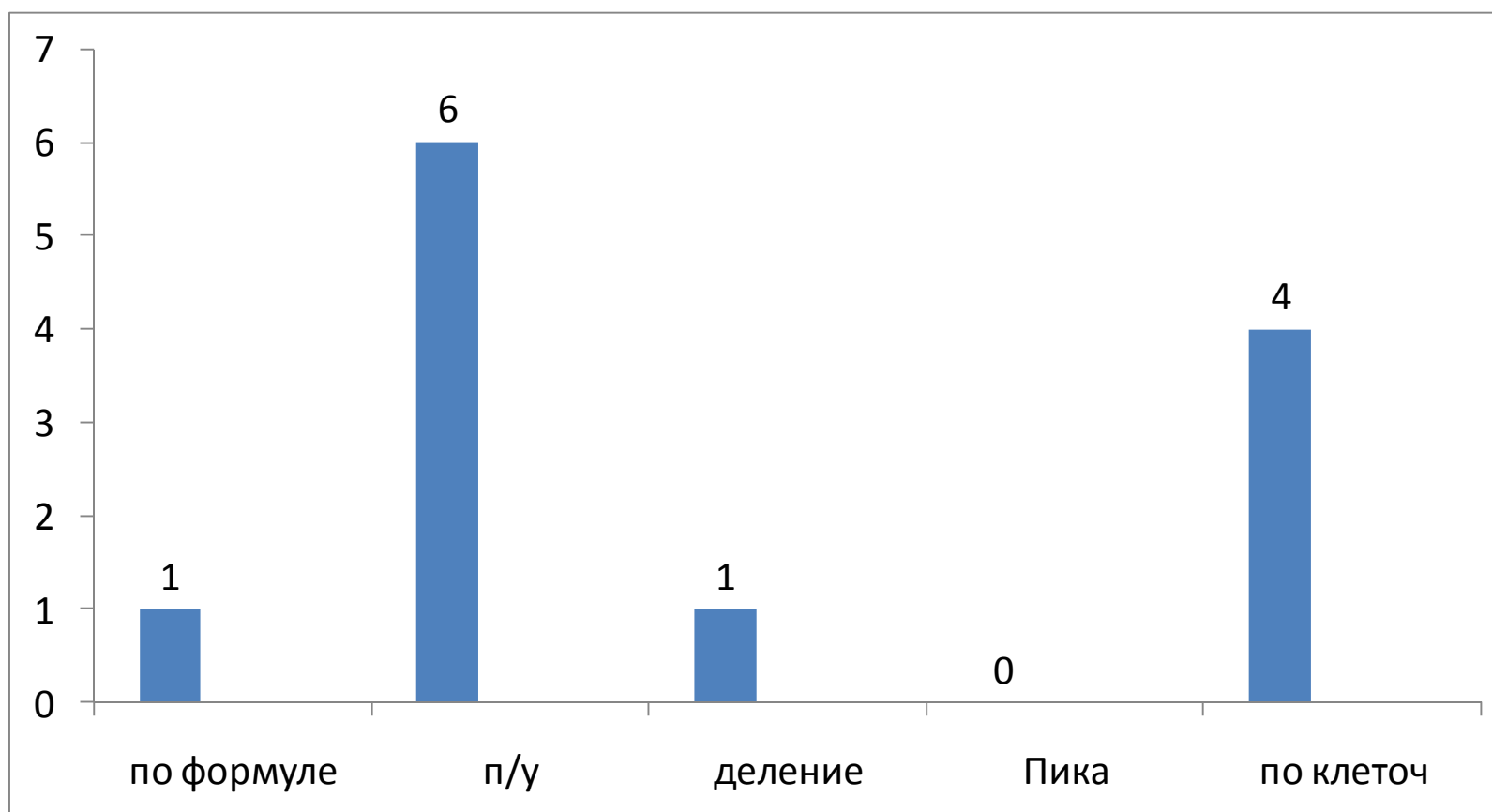
7



8



Результаты применение методов нахождения площадей фигур учащимися 11 класса



Заключение

Площади фигур не утратили своего значения в современном мире. Понятие площади используется во многих профессиях. Они применяются в строительстве, проектировании и в других видах деятельности человека.

В результате нашей работы мы расширили свои знания о вычислении площади многоугольника на клетчатой бумаге. Мы научились вычислять площади многоугольников, нарисованных на клетчатом бумаге, разными способами.

Увидели, что задачи данного типа встречаются на экзаменах ЕГЭ и ГИА и являются одними из простейших задач. Многие эксперты считают, что самым надежным способом является – способ выделения прямоугольника, а самым быстрым – это применения формулы Пика.